Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 [00868] [correction]
Etablir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

Exercice 2 [00885] [correction]
Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 [00884] [correction]
Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 4 [00878] [correction]
Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a, b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f.
Montrer que $\inf\limits_{[a,b]} f_n \to \inf\limits_{[a,b]} f$.

Exercice 5 [00879] [correction]
On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers x. Montrer

$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Exercice 6 [00886] [correction]
Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

Exercice 7 [00880] [correction]
Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1[$.
Montrer que la suite (f_n) convergence uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 8 X MP [02969] [correction]
Soit I un intervalle ouvert ; soit pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que (f_n) converge simplement. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exercice 9 [00888] [correction]
Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ décroissante et continue telle que $f_n \xrightarrow[CS]{} 0$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 10 [00889] [correction]
[Théorème de Dini]
Soient des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.
a) Justifier l'existence de

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$$

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
c) En observant que pour tout $p \leqslant n$,

$$f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$$

montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Exercice 11 [00894] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.
a) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
b) Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 12 Centrale MP [02489] [correction]
a) Simplifier avec un logiciel de calcul formel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X-\frac{k}{n}\right)^2 X^k(1-X)^{n-k}$$

Pour $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k}$$

b) On suppose f k-lipschitzienne avec $k>0$.
Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
c) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et f' k-lipschitzienne sur $[0,1]$.
Montrer que $B_n(f)'$ converge uniformément vers f'. Indication : Utiliser $B_{n-1}(f')-B_n(f)'$.

Etude de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 13 [00881] [correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=n^\alpha x(1-x)^n$$

a) Etudier la limite simple de (f_n).
b) Pour quels $\alpha\in\mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 14 [00869] [correction]
Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}$.
Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15 [00871] [correction]
On pose $f_n(x)=x^n\ln x$ avec $x\in\,]0,1]$ et $f_n(0)=0$.
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

Exercice 16 [00872] [correction]
Etudier la convergence uniforme de $f_n:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\frac{x}{n(1+x^n)}$.

Exercice 17 [00870] [correction]
On pose $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ avec $x\in\mathbb{R}^+$.
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 18 [00873] [correction]
On pose $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-nx}$ avec $x\in\mathbb{R}^+$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 19 [00874] [correction]
On pose $f_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x\in\mathbb{R}$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 20 [00875] [correction]
On pose $f_n(x)=x^2\sin\frac{1}{nx}$ pour $x>0$ et $f_n(0)=0$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a,a]$ avec $a>0$.

Exercice 21 [00890] [correction]
Soit $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$.
a) Etudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, f_n(x)\geqslant\lim f_n(x)$$

b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t\in\mathbb{R}^+$,

$$t-\frac{t^2}{2}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ (avec $a>0$).
c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 22 [00892] [correction]
Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=n^2x(1-nx)\text{ si }x\in[0,1/n]\ \text{ et }f(x)=0\text{ sinon}$$

a) Etudier la limite simple de la suite (f_n).
b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
c) Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a>0$.

Exercice 23 [00891] [correction]
Pour $x\in[0,\pi/2]$, on pose $f_n(x)=n\sin x\cos^n x$.
a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
b) Calculer $I_n=\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0,\pi/2]$.

Exercice 24 Mines-Ponts MP [02830] [correction]
On pose, pour $x\geqslant 0$,

$$f_p(x)=\frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 25 X MP [02972] [correction]
Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x)=(1-x/n)^n$ si $x\in[0,n]$ et $f_n(x)=0$ si $x>n$. Etudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 26 [00876] [correction]
On pose $f_n(x)=\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 27 [00877] [correction]
On pose $f_n(x)=4^n(x^{2^n}-x^{2^{n+1}})$ pour $x\in[0,1]$.
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 28 [00883] [correction]
Soit $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x+1/n$. Montrer que (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 29 [00887] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Montrer que la suite des fonctions $g_n:x\mapsto n\left(f(x+1/n)-f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Exercice 30 Mines-Ponts MP [02831] [correction]
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ donnée par $f(x)=2x(1-x)$. Etudier la convergence de (f_n) où f_n est l'itéré $n$ème de f.

Exercice 31 [02860] [correction]
Soit (f_n) la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_0(x)=x$ et $f_{n+1}(x)=\frac{x}{2+f_n(x)}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Application des suites de fonctions

Exercice 32 [00893] [correction]
On définit (f_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x)=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$,

$$0\leqslant f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire que pour $n,p\in\mathbb{N}$,

$$\|f_{n+p}-f_n\|_\infty\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

c) Etablir que pour tout $x\in[0,1]$, la suite numérique $(f_n(x))$ est de Cauchy.
d) Etablir que (f_n) converge uniformément vers une fonction f non nulle vérifiant

$$f'(x)=f(x-x^2)$$

Exercice 33 X MP [02970] [correction]
On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continues.
On pose $\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$, pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Etudier la suite (f_n).
b) Soit $f = \lim(f_n)$. Trouvez une équation différentielle dont f est solution. Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Séries de fonctions

Exercice 34 [00896] [correction]
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35 [00895] [correction]
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 36 [00897] [correction]
On note χ_I la fonction caractéristique d'un intervalle I : $\chi_I(x) = 1$ si $x \in I$, 0 sinon.
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1}\chi_{[n,n+1[}(x)$$

sur $[0,+\infty[$.

Exercice 37 Mines-Ponts MP [02838] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : x \in [0,1] \mapsto n^\alpha x^n(1-x) \in \mathbb{R}$$

Etudier le mode convergence de la suite de fonctions (u_n), puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 38 [00882] [correction]
Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n f(x)$.
a) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 39 Mines-Ponts MP [02839] [correction]
On pose $u_0(x) = 1$ et $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n. Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 40 Mines-Ponts MP [02833] [correction]
On note U l'ensemble des complexes de module 1 ; soit ω un complexe de module $\neq 1$. Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynômiales.

Etude de fonction définie par la somme d'une série

Exercice 41 [00898] [correction]
Justifier l'existence de $f(x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Montrer que f est 1-périodique et qu'on a $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Exercice 42 [00900] [correction]
Soit

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

Justifier et calculer

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 43 [00901] [correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$
a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Etudier la monotonie de S.
c) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 44 [00902] [correction]
Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$
a) Montrer que S est définie et continue sur I.
b) Etudier la monotonie de S.
c) Calculer
$$S(x+1) - S(x)$$
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
e) Etablir
$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 45 [00903] [correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir
$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$
d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 46 [00904] [correction]
On pose $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.
a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
b) Etudier la limite de S en $+\infty$.
c) Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 47 [00139] [correction]
Pour $t > 0$, on pose
$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$$
Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 48 [00905] [correction]
On fixe $\alpha > 0$ et on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^\alpha x}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
a) Domaine de définition de f ?
b) Continuité de f ?
c) Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 49 [00906] [correction]
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
a) Quel est le domaine de définition de f ?
Etudier la continuité de f sur celui-ci.
b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 50 [00910] [correction]
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$
a) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 51 [00911] [correction]
On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.
a) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$
b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0,1]$.
c) En déduire l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 52 [00912] [correction]
On rappelle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$
et on pose pour $x > 0$,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$
a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir que
$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$
d) Donner un équivalent de S en $+\infty$.
e) Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 53 [00913] [correction]
On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}$ pour $x > 0$.
a) Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 54 [00914] [correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}n$.
a) Etablir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
b) Justifier que la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x+1) - S(x) = 1 - \mathrm{th}x$.
d) Etudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 55 [00915] [correction]
Soit $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ avec $x \geqslant 0$.
a) Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$, $S(x)$ est définie ?
b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.
c) Etudier la continuité de S sur $[0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.
d) Dresser le tableau de variation de S.

Exercice 56 [00916] [correction]
Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$.
a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
b) Etablir que pour tout $x \neq 0$, $f(x) + f(1/x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
c) Etablir que f est continue sur $]-1,1[$ puis que f est continue sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.
d) Etablir la continuité de f en 1.

Exercice 57 [00917] [correction]
Déterminer la limite de
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 58 [00918] [correction]
Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha - 1}$.
On pourra exploiter le théorème d' interversion limite/somme infinie.

Exercice 59 [00919] [correction]
Montrer, par une interversion série-limite que, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(z)$$

Exercice 60 [00920] [correction]
On donne $\forall \alpha \in [0,1]\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ (prolongée par continuité en 0).
En intégrant sur $[0,1]$, en déduire la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 61 Centrale MP [02480] [correction]
a) Déterminer le domaine de définition réel de $f : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2}$.
b) Déterminer $\lim_{a\to0^+} af(a)$ et $\lim_{a\to+\infty} f(a)$.

Exercice 62 Mines-Ponts MP [02835] [correction]
Si $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
b) Montrer

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 63 Mines-Ponts MP [02836] [correction]
Soit α un réel. Pour tout entier $n>0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

a) Déterminer I.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
d) On suppose $\alpha \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est-elle uniforme sur I ?
e) Etudier la continuité de S sur I.

Exercice 64 Mines-Ponts MP [02837] [correction]
On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

Etudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équation équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 65 X MP [02971] [correction]
Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n\left(1+|x_n|\right)$ converge.
On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,|x-x_n|$.
Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 66 X MP [02973] [correction]
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}\left([0,1]\,,\mathbb{R}\right)$ telles que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 67 X MP [02974] [correction]
a) Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(x-n)^{-2}$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
b) Soit un réel $c>2$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x)$. Montrer que $f=0$.
c) Montrer que pour tout x réel non entier, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(x-n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$.

Exercice 68 Centrale MP [02112] [correction]
On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + \frac{x}{2k}}{1 + \frac{x}{2k-1}} \right)$$

1.a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente, de limite strictement positive. On note $P(x)$ cette limite.
1.b) Tracer sur $[0, 20]$, le graphe de quelques fonctions P_n.
2.a) Démontrer que P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2.b) Etudier le sens de variation de P sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que l'existence de limite de P en $+\infty$.
3.a) Calculer $P(2j)$ pour tout entier naturel j. Confirmer le résultat avec le logiciel de calcul formel (on rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$)
3.b) P est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 69 Mines-Ponts MP [03203] [correction]
Définition, continuité et dérivabilité de

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1 + n^2x^2)}$$

Fonction zêta et zêta alternée

Exercice 70 [00907] [correction]
On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a) Montrer que la fonction ζ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
b) Etudier monotonie et convexité de la fonction ζ.
c) Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
e) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz établir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Exercice 71 Mines-Ponts MP [02834] [correction]
Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?
b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1, 1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.
d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 72 [00899] [correction]
Soient $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\zeta_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
a) Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2.
b) Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.
c) Etablir la relation $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 73 [00908] [correction]
On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 74 [00909] [correction]
On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Théorème de convergence dominée

Exercice 75 [00921] [correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, \mathrm{d}x$$

$$\text{b) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

Exercice 76 [00746] [correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :
a) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, \mathrm{d}x$b) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$c) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

Exercice 77 [00922] [correction]
Etudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 78 [00923] [correction]
Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 79 [00924] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 80 [00925] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 81 Centrale MP [00926] [correction]
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 82 [00927] [correction]
Etablir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 83 [03013] [correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$$

Indice : utiliser une suite de fonctions judicieuse.

Exercice 84 Centrale MP - Mines-Ponts MP [02435] [correction]
Etudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) \, \mathrm{d}t$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 85 Mines-Ponts MP [02862] [correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (k+x)} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 86 X MP [02949] [correction]
Etudier la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 87 X MP [02982] [correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 88 Mines-Ponts PC [00150] [correction]
Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ bornée. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{+\infty}nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 89 X MP [03159] [correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0<h<\delta$.
a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n=\int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta t-h)\right)\,\mathrm{d}t$$

b) On pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n}-h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 90 CCP MP [03294] [correction]
Montrer

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Exercice 91 [00928] [correction]
Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 92 [00929] [correction]
Etablir que

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 93 [00930] [correction]
Etablir que $\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement $0,916$.

Exercice 94 [00931] [correction]
a) Etablir que

$$\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

b) Calculer cette somme sachant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 95 [00932] [correction]
Etablir

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

Exercice 96 Mines-Ponts MP - CCP MP [00933] [correction]
Etablir

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Exercice 97 [00934] [correction]
Etablir que pour $p\geqslant 2$,

$$\int_0^1\frac{(\ln x)^p}{1-x}\,\mathrm{d}x=(-1)^p p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$$

Exercice 98 [00935] [correction]
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 99 Centrale MP [00939] [correction]
Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$$

a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.
b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.
c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 100 [00940] [correction]
Etablir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 101 [00941] [correction]
Etablir que pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Exercice 102 [00943] [correction]
Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2+\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 103 Centrale MP [02439] [correction]
Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it} - a}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 104 [02641] [correction]
n désigne un entier naturel non nul.
a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est définie.
b) Soit $a \geqslant 0$. Calculer

$$\int_0^{a} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

puis de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

c) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

converge uniformément sur $[0, a]$, puis que

$$\int_0^{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

e) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente et donner sa valeur.
Comparer avec le résultat obtenu en b). Qu'en conclure ?

Exercice 105 Centrale MP [02438] [correction]
a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

b) Comparer

$$a_n \text{ et } n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1-t\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 106 Centrale MP [02445] [correction]
On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n > 0$.
a) Trouver la limite ℓ de (I_n).
b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.
c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 107 Centrale MP [02474] [correction]
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\left(\mathrm{e}^t - \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{t^p}{p!}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Soit u_n cette intégrale.
b) A l'aide du logiciel de calcul fourni, calculer u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$, puis effectuer une conjecture sur l'expression de u_n.
c) Montrer que l'on peut écrire u_n comme somme d'une série et utiliser ce résultat pour démontrer la conjecture précédente.

Exercice 108 Centrale MP [02479] [correction]
Soit pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^4+n^4}$.
a) Donner le domaine de définition de f.
b) La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?
c) Calculer, avec un logiciel de calcul formel $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.
d) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
e) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Exercice 109 Centrale MP [02485] [correction]
Soit

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}$$

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ que l'on déterminera tel que

$$S = a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} + b\pi$$

b) Calculer S à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Exercice 110 Centrale MP [02488] [correction]
Soit $a \in \mathbb{Q} \cap \left]0,2\right[$ avec $a \neq 1$.
On pose

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-(1-a)x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

a) Justifier l'existence de $I_n(a)$.
b) Calculer, avec Maple, $I_n(a)$ pour $a \in \{1/5, 1/4, 1/3, 1/2\}$ et pour $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
Etablir une conjecture.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $I_n(a) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p}(1-a)^p$ où les $\alpha_{n,p}$ sont à déterminer.
On pourra utiliser

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

d) On pose

$$R_n(X) = \frac{(X+1)\dots(X+n)}{(X+n+1)\dots(X+2n+1)}$$

Décomposer R_n en éléments simples.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe des rationnels $r_n(a)$ et $q_n(a)$ tels que $I_n(a) = r_n(a) + q_n(a) \ln a$.

Exercice 111 Mines-Ponts MP [02807] [correction]
a) Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\int_0^1 x^n(1-x)^m \,\mathrm{d}x$.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}$.
b) Calculer S_0 et S_{-1}.
c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p.

Exercice 112 Mines-Ponts MP [02840] [correction]
a) Si $(s,\lambda) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$ pour $n \geqslant 0$? A λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.
b) Calculer $\lim\limits_{s \to \sup \Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.
c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \to \inf \Delta_\lambda$.
d) Si $n \geqslant 1$, calculer : $\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \,\mathrm{d}y$.
e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 113 Mines-Ponts MP [02864] [correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 114 Mines-Ponts MP [02866] [correction]
Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) \mathrm{d}t$$

Exercice 115 Mines-Ponts MP [02869] [correction]
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 116 Mines-Ponts MP [02870] [correction]
Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer :

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exercice 117 Centrale MP [03065] [correction]
L'objectif de cet exercice est de proposer un développement en série alternée du nombre π.
En utilisant votre logiciel de calcul formel :
a) Montrer que, pour n, m entiers naturels

$$\int_0^1 t^n (1-t)^m \,\mathrm{d}t = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$$

En déduire

$$\frac{3958}{1260} < \pi < \frac{3959}{1260}$$

c) On note $A(x)$ le quotient de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$ (on ne le calculera explicitement que plus tard)
Montrer que

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{A(x)}{1 + \frac{x^4(1-x)^4}{4}}$$

En déduire que

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k \text{ avec } L_k = \int_0^1 A(x) x^{4k} (1-x)^{4k} \,\mathrm{d}x$$

d) Etablir que pour n entier naturel

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k + \lambda \int_0^1 \frac{x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

où λ est un réel dépendant de n que l'on exprimera.
e) Calculer $A(x)$, L_0, L_1 et proposer un encadrement du nombre π.

Exercice 118 Mines-Ponts PC [00118] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right]^n \mathrm{d}x$$

a) Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 119 [03214] [correction]
Montrer que

$$\forall a, b > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 120 [03268] [correction]
Montrer

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}$$

Exercice 121 Mines-Ponts MP [03287] [correction]
Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

Intégration terme à terme par convergence dominée

Exercice 122 [00936] [correction]
Montrer que, pour $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

Exercice 123 [00942] [correction]
Pour tout $\alpha > 0$, établir que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 124 Mines-Ponts MP [02863] [correction]
a) Etablir pour $a, b > 0$ l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 125 [02437] [correction]
Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Exercice 126 Mines-Ponts MP [02867] [correction]
Soit (a_n) une suite croissante de réels > 0 telle que $a_n \to +\infty$.
Justifier

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

$f_n \xrightarrow{CS} f$. $\forall a, b \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b)$ donc à la limite quand $n \to +\infty$, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Exercice 2 : [énoncé]

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.
Pour n assez grand $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha$ uniformément en x et alors $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant \varepsilon$ d'où la convergence uniforme de $(g \circ f_n)$.

Exercice 3 : [énoncé]

$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \to 0$ car $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et $\|f_n - f\|_\infty, \|g_n - g\|_\infty \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

Posons $m_n = \inf_{t \in [a,b]} f_n(t) = f_n(t_n)$ pour un certain $t_n \in [a,b]$. Montrons que $m_n \to m = \inf_{t \in [a,b]} f$. Notons que $\inf_{t \in [a,b]} f = f(t_\infty)$ pour un certain $t_\infty \in [a,b]$ car f est continue puisque limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ donc $m_n = f_n(t_n) \geqslant f(t_n) - \varepsilon \geqslant m - \varepsilon$ et $m = f(t_\infty) \geqslant f_n(t_\infty) - \varepsilon \geqslant m_n - \varepsilon$ donc $|m_n - m| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $m_n \to m$.

Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2, |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

car $f(x_n) \to f(x)$ en vertu de la continuité de f.
Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall n \geqslant n_0, |f_n(x_n) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 6 : [énoncé]

Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continue de I vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
La fonction f_n étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$\forall x, y \in I, |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon$.
Or $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ donc
$\forall x, y \in I, |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$.
Ainsi f est uniformément continue.

Exercice 7 : [énoncé]

Il suffit d'observer que $(f_n(1))$ converge. Par le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \|f_p - f_q\|_{\infty,[0,1[} \leqslant \varepsilon$,
Par suite $\forall x \in [0,1[\,, |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon$ et à la limite quand $x \to 1$:
$|f_p(1) - f_q(1)| \leqslant \varepsilon$.
La suite réelle $(f_n(1))$ est de Cauchy et donc elle converge.

Exercice 8 : [énoncé]

Notons f la limite simple de la suite (f_n). Cette fonction f est évidemment convexe.
Par l'absurde, supposons la convergence non uniforme sur un segment $[a,b]$ inclus dans I.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ tels que $|f_n(x_n) - f(x)| \geqslant 2\varepsilon$ pour tout naturel n.
Par compacité, on peut extraire de (x_n) une suite convergente et, quitte à supprimer certaines des fonctions f_n, on peut supposer que (x_n) converge. Posons x_∞ sa limite.
Soit $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, b + \alpha] \subset I$ (ce qui est possible car l'intervalle I est ouvert).
Pour tout fonction convexe φ, la croissance des pentes donne :
$\forall x \neq y \in [a,b]$, $\frac{\varphi(a) - \varphi(a-\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leqslant \frac{\varphi(b+\alpha) - \varphi(b)}{\alpha}$ $(\star)$.
Par convergence simple, $f_n(x_\infty) \to f(x_\infty)$.
Pour n assez grand, $|f_n(x_\infty) - f(x_\infty)| \leqslant \varepsilon$ donc
$|f_n(x_n) - f_n(x_\infty) + f(x_\infty) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$
puis $\left|\frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} + \frac{f(x_\infty) - f(x_n)}{x_\infty - x_n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{x_\infty - x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
Or la suite $\left(\frac{f(x_\infty) - f(x_n)}{x_\infty - x_n}\right)$ est bornée en vertu de $(\star)$ et la suite $\left(\frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty}\right)$ aussi puis $\frac{f_n(a) - f_n(a-\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} \leqslant \frac{f_n(b+\alpha) - f_n(b)}{\alpha}$ et les termes encadrant convergent.
On obtient ainsi une absurdité.

Exercice 9 : [énoncé]
$\forall x \in [0,1]\,, f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0)$ donc
$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leqslant \max(|f_n(0)|\,, |f_n(1)|) \leqslant |f_n(0)| + |f_n(1)| \to 0.$

Exercice 10 : [énoncé]
a) La suite $\|f_n\|_\infty$ est décroissante et minorée donc convergente.
b) f_n est positive car

$$f_n(x) \geqslant \lim_{p\to+\infty} f_p(x) = 0$$

$|f_n| = f_n$ étant continue sur un segment, elle y admet un maximum en un certain x_n.
c) La propriété $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$ provient de la décroissance de la suite $(f_p(x_n))_{p\in\mathbb{N}}$.
La suite (x_n) étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite a.
Comme

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_p(x_{\varphi(n)})$$

on a la limite quand $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| \leqslant f_p(a)$$

En passant cette relation à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| \leqslant 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \|P_n - f\|_\infty \leqslant 1/2$ et donc $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$.
Seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur $\mathbb{R}$ donc $P_n - P_N$ est une fonction polynomiale constante. Posons λ_n la valeur de celle-ci.
b) $\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \to f(0) - P_N(0) = \lambda_\infty$. $P_n = P_N + P_n - P \xrightarrow[CS]{} P_N + \lambda_\infty$ donc par unicité de limite $f = P_N + \lambda_\infty$ est une fonction polynomiale.

Exercice 12 : [énoncé]
a) On propose un premier calcul

```
sum(binomial(n,k)*(X-k/n)^2*X^k*(1-X)^(n-k),k=0..n);
```

Une simplification s'impose

```
simplify(%);
```

Le résultat n'est pas encore optimal. Il convient de signifier à Maple que n est entier

```
assume(n,integer);
```

On peut reprendre la simplification

```
simplify(%);
```

Finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X - \frac{k}{n}\right)^2 X^k (1-X)^{n-k} = \frac{X(1-X)}{n}$$

b) On remarque

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$$

Par suite

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(k/n\right)\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

puis

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \rho \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x - k/n|\, x^k (1-x)^{n-k}$$

en notant ρ plutôt que k le rapport de lipschitzianité.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2}$$

On peut aussi affirmer, pour $a_k > 0$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k x_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k y_k^2}$$

On en déduit

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|x-k/n|\,x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-k/n)^2x^k(1-x)^{n-k}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$

Ainsi

$$|f(x)-B_n(f)(x)| = \rho\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}$$

puis $\|f-B_n(f)\|_\infty \to 0$.
c) En exploitant

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \text{ et } (n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

on obtient

$$B_n(f)'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-1-k}$$

Par suite

$$B_n(f)'(x)-B_{n-1}(f')(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)x^k(1-x)^{n-1-k}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in \left]k/n,(k+1)/n\right[$ tel que

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}f'(c_k)$$

et alors

$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right| \leqslant \frac{\rho}{n}\left|c_k-\frac{k}{n-1}\right|$$

Puisque

$$\frac{k}{n-1} \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right] \text{ et } c_k \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$$

on a

$$\left|c_k-\frac{k}{n-1}\right| \leqslant \left|\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\rho}{n^2}$$

puis

$$|B_n(f)'(x)-B_{n-1}(f')(x)| \leqslant \frac{\rho}{2n}$$

Ainsi $\|B_n(f)'-B_{n-1}(f')\|_\infty \to 0$.
Or par l'étude qui précède $\|B_{n-1}(f')-f'\|_\infty \to 0$ donc $\|B_n(f)'-f'\|_\infty \to 0$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Si $x=0$ alors $f_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x \in \left]0,1\right]$ alors $f_n(x) \to 0$ par comparaison des suites de référence.
b) $f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.
Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{-1+o(1)} \to \mathrm{e}^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$.
Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 14 : [énoncé]
Par opérations, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
$f_n \xrightarrow{CS} f$ avec $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.
En multipliant par la quantité conjuguée : $f_n(x)-f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2+1/n}+\sqrt{x^2}}$.
Par suite $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\|f_n-f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15 : [énoncé]
Les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ pour $n \geqslant 1$ et dérivables sur $]0,1]$ avec

$$f_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x)$$

Le tableau de variation de f_n donne

$$\sup_{[0,1]} |f_n| = -f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{n\mathrm{e}} \to 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 16 : [énoncé]
Pour $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n}$.
$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$. Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

donc
$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0$.
Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 17 : [énoncé]
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque

$$f_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche,

$$\sup_{[a,+\infty[} |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 18 : [énoncé]
$f_n'(x) = nx(2-nx)\mathrm{e}^{-nx}$, le tableau de variation de f_n donne
$\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n}\mathrm{e}^{-2} \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur $[a,+\infty[$.

Exercice 19 : [énoncé]
$f_n(0) \to 1$ et $f_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En revanche si $|x| \geqslant |a|$ alors
$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
$f_n(x) \xrightarrow[CS]{} 0$ et $f_n(n) = n^2\sin(1/n^2) \to 1$ il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Sur $[-a,a]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{a}{n} \to 0$ via $|\sin t| \leqslant |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a,a]$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) $f_n(x) = \exp(-n\ln(1+\frac{x}{n})) = \exp(-x + o(1)) \to \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
On sait $\ln(1+t) \leqslant t$ donc par opérations : $f_n(x) \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leqslant \ln(1+\frac{x}{n}) \leqslant \frac{x}{n}$$

puis

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x+\frac{x^2}{2n}} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}}$$

Sur $[0,a]$ on a $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} \to 1$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\mathrm{e}^{a^2/2n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.
On a alors pour tout $x \in [0,a]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x^2/2n} - 1\right) \leqslant \mathrm{e}^{a^2/2n} - 1 \leqslant \varepsilon$$

Par suite $f_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CU} f$.
c) Les fonctions f_n sont décroissantes donc

$$\forall x \geqslant a, f_n(x) \leqslant f_n(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\mathrm{e}^{-a} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geqslant a$,

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon/3$$

Puisque $f_n(a) \to \mathrm{e}^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \left|f_n(a) - \mathrm{e}^{-a}\right| \leqslant \varepsilon/3$$

Mais alors $\forall x \geqslant a$,

$$\left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant f_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(a) + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \left(f_n(a) - \mathrm{e}^{-a}\right) + \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon$$

De plus, $f_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CU} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \forall x \in [0,a] \left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Finalement

$$\forall n \geqslant \max(N,N'), \forall x \in \mathbb{R}^+, \left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}^+]{CU} f$.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite $f_n \xrightarrow[CS]{} 0$.
b)

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \not\to \int_0^1 0\,\mathrm{d}t$$

c) Pour n assez grand, $\sup\limits_{[a,1]} |f_n(x)| = 0$ donc $f_n \xrightarrow[CU]{} 0$ sur $[0,a]$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$. Pour $x \in \left]0,\pi/2\right]$, $\cos x \in [0,1[$ donc $f_n(x) \to 0$.
b) $I_n = \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$. $I_n \to 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0.\mathrm{d}x$ donc il n'y a pas convergence uniforme.
c) $\begin{array}{c|ccccc|} x & 0 & & x_n & & \pi/2 \\ \hline f_n & 0 & \nearrow & f_n(x_n) & \searrow & 0 \end{array}$ avec $x_n = \arccos\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 0$ et
$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1+1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} \to +\infty$
Soit $[a,b] \subset \left]0,\pi/2\right]$. On a $a > 0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup\limits_{[a,b]} |f_n| = f_n(a) \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[0,a]$.

Exercice 24 : [énoncé]
Quand $p \to +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x)$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha \in \left]0,1\right]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leqslant (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geqslant 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{1}{p}$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour n assez grand
$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp\left(n\ln(1 - x/n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$.
La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leqslant f$.
Etudions $\delta_n = f - f_n \geqslant 0$.
Pour $x \in \left]n,+\infty\right[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0,n]$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$.
Posons $\varphi_n(x) = (n-1)\ln\left(1 - x/n\right) + x$. $\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$ est du signe de $1 - x$.
Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0,n[$ tel que $\varphi_n(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant x_n$ et $\varphi_n(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant x_n$. On en déduit que pour $x \leqslant x_n$, $\delta_n'(x) \geqslant 0$ et pour $x \geqslant x_n$, $\delta_n'(x) \leqslant 0$. Ainsi
$\|\delta_n\|_{\infty;[0,n]} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}$.
Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $\|\delta_n\|_{\infty,[0,n]} \leqslant \frac{M}{n}$
Finalement $\|\delta_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0$.
On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

Exercice 26 : [énoncé]
$f_n \xrightarrow[CS]{} 0$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})\right| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \to +\infty$ il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \to 0$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a > 0$, on a, pour n assez grand, $\sup_{x\geqslant a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$. Ainsi il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et de même sur $]-\infty, a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

Exercice 27 : [énoncé]
$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(1/\sqrt[2^n]{2}\right) = 4^{n-1} \to +\infty$ il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.
Or $1/\sqrt[2^n]{2} \to 1$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a \in [0, 1[$, on a, pour n assez grand, $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$. Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0, a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

Exercice 28 : [énoncé]
$f_n(x) \xrightarrow[CS]{} x$ et $\|f_n(x) - x\|_\infty = 1/n \to 0$.
$f_n(x)^2 \xrightarrow[CS]{} x^2$ et $f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \to 2$ donc il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 29 : [énoncé]
Par la formule de Taylor Lagrange : $\left|f(x + \frac{1}{n}) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{n^2}$ avec $M = \sup |f''|$.
Par suite $|g_n(x) - f'(x)| \leqslant \frac{M}{n}$ et donc $\|g_n(x) - f'(x)\|_{\infty,\mathbb{R}} \to 0$.

Exercice 30 : [énoncé]
On remarque de $f(1 - x) = f(x)$. Pour étudier le comportement de $(f_n(a)) = (f^n(a))$, on peut se limiter à $a \in [0, 1/2]$. Etudier le comportement de $(f^n(a))$ équivaut à étudier la suite récurrente définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Une étude élémentaire permet d'affirmer qu'elle est croissante. Si $a = 0$, cette suite est en fait constante, si $a > 0$ cette suite converge vers une limite qui ne peut qu'être 1/2. On peut alors affirmer qu'il y a convergence simple de (f_n) vers la fonction $f : x \mapsto 1/2$ si $x \in]0, 1[$ et 0 sinon. Par non continuité, il y a non convergence uniforme sur $[0, 1]$. En revanche la croissance de f sur $[0, 1/2]$ permet d'assurer que $\forall a \in]0, 1/2]$, $\forall x \in [a, 1/2]$, $f_n(x) \geqslant f_n(a)$ ce qui permet de justifier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, 1 - a]$ pour $a \in]0, 1/2]$.

Exercice 31 : [énoncé]
Pour $x \geqslant 0$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite homographique.
L'équation $r = \frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1 = \sqrt{1 + x} - 1$ et $r_2 = -\sqrt{1 + x} - 1$.
Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}\frac{2 + r_2}{2 + r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2 + r_2}{2 + r_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Puisque $|\rho| < 1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0.
Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1 - g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1 = \sqrt{1 + x} - 1$.
Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f_\infty : x \mapsto \sqrt{1 + x} - 1$.
Puisque les fonctions f_n sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n - f_\infty|$ ne peut-être bornée sur $\mathbb{R}^+$ car de limite $+\infty$ en $+\infty$; il n'y a donc par convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0, a]$ pour tout $a \geqslant 0$.
En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)}2\sqrt{1 + x}$$

D'une part, la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1 + x}$ est bornée sur $[0, a]$.
D'autre part,

$$g_n(x) = \left[\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right]^n g_0(x)$$

Sur $[0, a]$, la fonction

$$x \mapsto \left|\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right|$$

admet un maximum de valeur < 1 et puisque la fonction continue g_0 est bornée sur $[0, a]$, on peut montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, a]$.
La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0, a]$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leqslant f_1(x) - f_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

or $f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2) \geqslant 0$ donc $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \geqslant 0$ et

$$f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2) \leqslant \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.
b) On a $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$ donc par l'inégalité triangulaire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

c) Or $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste de série convergente) donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right| \leqslant \varepsilon$$

puis

$$\forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Enfin $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_{n+p} - f_n\|_\infty$ donc $(f_n(x))$ est de Cauchy.

d) Pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge car de Cauchy. Posons $f(x)$ la limite de $f_n(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

A la limite quand $p \to +\infty$:

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in [0, 1], |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, \|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $f_n \xrightarrow{CU} f$. Par convergence uniforme, f est continue et

$$\forall x \in [0, 1], \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x f(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $f(0) = 1$) et dérivable avec

$$f'(x) = f(x - x^2)$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.
$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \ldots$
Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors $\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}$.
Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \to 2$$

et, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{\alpha_n}$$

On montre alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

donc $\alpha_n = \|f_n\|_{\infty,[0,1]} \to 0$.
On en déduit que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
b) Il y a beaucoup d'équation différentielle dont f est solution...
Cependant $f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt$ donne à la limite $f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,dt$ d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y : x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$ est solution.

Exercice 34 : [énoncé]
On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{N+1+x^2} \leqslant \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35 : [énoncé]
$|f_n(x)| \leqslant 1/n^2$ et $\sum 1/n^2$ converge. Il y a donc convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36 : [énoncé]
Il y a convergence simple, uniforme mais pas normale vers la fonction
$x \to 1/E^+(x)$ où $E^+(x)$ désigne le plus petit entier supérieur à x.

Exercice 37 : [énoncé]
Si $x = 1$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$. Si $x \in]0,1]$ alors $u_n(x) \to 0$. La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.
$u_n'(x) = n^\alpha x^n - n^{\alpha+1}x^{n-1}(1-x) = n^\alpha x^{n-1}(n-(n+1)x)$.

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{1+o(1)} \to \mathrm{e}$ donc

$$\|u_n\|_\infty \sim \mathrm{e}\, n^{\alpha-1}$$

Il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ converge, $\|u_n\|_\infty \sim \mathrm{e}\,n^{\alpha-1}$, il y a donc convergence normale sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 0$.
Pour $\alpha \geqslant 0$, $u_n(x) \geqslant x^n(1-x) = v_n(x)$.
Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(1)$$

La série $\sum v_n$ ne converge donc pas uniformément vers $[0,1]$ et par suite $\sum u_n$ non plus.
Enfin pour $a < 1$, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,a]} = u_n(a)$ et donc (u_n) converge uniformément sur $[0,a]$ et $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 38 : [énoncé]
a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Puisque les fonctions f_n sont continues, pour qu'il y ait convergence uniforme, il est nécessaire que la fonction limite soit continue et donc que $f(1) = 0$.
Inversement, supposons $f(1) = 0$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Sur $[0,1-\alpha]$, $|f_n(x)| \leqslant (1-\alpha)^n \|f\|_\infty$ et sur $[1-\alpha,1]$, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon$
Puisque $(1-\alpha)^n \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, (1-\alpha)^n \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

On a alors pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $f_n \xrightarrow{CU} \tilde{0}$.
b) Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Puisqu'il n'y a pas divergence grossière, on a $f_n(1) \to 0$ et donc $f(1) = 0$.
Notons S la somme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
Pour $x \in [0,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(1) = 0$$

Or la fonction S est continue comme somme uniformément convergente d'une série de fonctions continues.
Par suite $\lim_{x\to 1^-} S(x) = 0$ ce qui donne

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Inversement, supposons $f(1) = 0$, f dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Posons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.
Pour $x \neq 1$,

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} f(x)$$

Posons $g : x \in [0,1[\mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ prolongée par continuité en 1 par la valeur $g(1) = 0$.
La fonction g est continue sur $[0,1]$ et $g(1) = 0$ donc la suite (g_n) définie par $g_n : x \mapsto x^n g(x)$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur $[0,1]$. Or
$S_n(x) = g(x) - g_{n+1}(x)$ donc $S_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CU} g$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément.

Exercice 39 : [énoncé]
Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, $t - t^2 \in [0,1/4]$. Pour $x \in [0,1/4]$,
$|u_{n+1}(x)| \leqslant x \|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4}\|u_n\|_{\infty,[0,1/4]}$ donc aisément $\|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$
puis par la remarque initiale, pour tout $x \in [0,1]$, $|u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$
donc $\|u_{n+1}\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{4^n}$ et $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 40 : [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors $\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$ et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$.
Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer pour $k \in \mathbb{N}$,
$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-i(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.
Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors $\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{e}^{i\theta}-\omega|} \neq 0$. Or par le calcul précédent, on peut affirmer $\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = 0$ et conclure à une absurdité.

Exercice 41 : [énoncé]
$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où l'existence de la somme. $f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+k}$ or $\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$ donc à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x+1) = f(x)$.
$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2\sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$ donne à la limite
$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.

Exercice 42 : [énoncé]
On peut écrire

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$$

avec convergence normale sur $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{n}{n-1} - \ln\frac{n+1}{n}$$

et en transitant par les sommes partielles

$$\sum_{n=2}^{N} \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N} \ln\frac{n}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \ln\frac{n+1}{n} = \ln N - \ln(N+1) + \ln 2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln 2$$

Ainsi

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ avec $x > 0$. Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Soit $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+n^2a}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.

On peut donc conclure que S est bien définie et continue.
b) Chaque f_n est décroissante donc S aussi.
c) Par convergence normale sur $[1,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

On remarque $xf_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$.
Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\|g_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par suite $xS(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ et

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$$

d) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison somme-intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$$

Or

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Exercice 44 : [énoncé]
a) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$
Soient $-1 < a \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant b$.

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)}$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$.
b) Chaque f_n est croissante donc par sommation de monotonie, S est croissante.
c)

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

donc

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

d) Quand $x \to -1$, $S(x+1) \to S(0) = 0$ puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \sim -\frac{1}{x+1}$$

e) $S(0) = 0$ et $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

f) On sait $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n$ et on sait $\ln(n+1) \sim \ln n$.
Puisque $S(E(x)) \leqslant S(x) \leqslant S(E(x)+1)$ on obtient

$$S(x) \sim \ln E(x) \sim \ln x$$

Exercice 45 : [énoncé]
a) Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.
Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers S.
Soi $a > 0$, sur $[a,+\infty[$,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a,+\infty[$.
Par théorème, S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leqslant 0$ et S est décroissante.
c)

$$S(x+1)+S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$$

d) Quand $x \to 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \to S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x)+S(x+1)) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{2}(S(x)+S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{1+na} \to 0$$

pour tout $a > 0$.
Par converge uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Par converge uniformément sur $[a,+\infty[$,

$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1$$

Par application du critère spécial des séries alternées

$$1 - \frac{1}{1+t} \leqslant S(t) \leqslant 1$$

c) Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

$$f_n'(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$$

La série $\sum f_n'(t)$ est alternée avec $|f_n'(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.
Puisque

$$|f_n'(t)| - \left|f_{n+1}'(t)\right| = \frac{n(n+1)t^2-1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite $(|f_n'(t)|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.
Soit $a > 0$.
A partir d'un certain rang n_0,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geqslant 0$$

et alors pour tout $t \geqslant a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0.
On a alors

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{n}{(1+nt)^2} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2} \to 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 47 : [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.
On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{2p}}{2pt+1} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)\left[(2p+1)t+1\right]}$$

La fonction $f_t : x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$ est décroissante.
Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(t) \leqslant \int_0^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)\left((2x+1)t+1\right)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t)-\ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t \to 0^+$, on obtient par encadrement $S(t) \to 1/2$.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Si $x \leqslant 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) = \mathrm{e}^{2\ln n - xn^\alpha} \to 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. f est définie sur $]0,+\infty[$.
b) Les fonctions f_n sont continues.
Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que f est continue.
c) Par convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Exercice 49 : [énoncé]
a) Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$
Pour $x \leqslant 0$, la série $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.
La fonction f est donc définie sur $]0,+\infty[$.
Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.
c) Par convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
d) Par monotonie de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$, $\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
En sommant $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{x^2}$ donc $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$.

Exercice 50 : [énoncé]
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
De plus

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right\|_\infty \leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \to 0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
b) $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1+1/n)$. Par converge uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+1/n)$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1+1/n) = \sum_{n=1}^{N} \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(2n+1) - \ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1+1/n) = \ln\left(\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 (2n+1)\right)$$

Or

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1+1/n) \sim \ln(2/\pi)$$

On en déduit

$$\ell = \ln(2/\pi)$$

Exercice 51 : [énoncé]
a) Pour $x \in]0,1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x=0$ ou $x=1$.
b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leqslant x^{2(n+2)} \ln x$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} \ln x$ donne

$$\forall x \in [0,1], \left|x^{2(n+2)} \ln x\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0,1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

Exercice 52 : [énoncé]
a) $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers S.

$$\forall a > 0, \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. Par théorème S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leqslant 0$ et S est décroissante.
c)

$$xS(x) - S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d)

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \text{ et } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Quand $x \to 0^+$, $xS(x) \to 1$ d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(x+1+n)} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \to 0$$

Par converge uniformément sur $]0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x \to +\infty$,

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{\mathrm{e}x}$$

Exercice 53 : [énoncé]

a) $f_n : x \mapsto \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $a > 0$. Sur $[a,+\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\frac{1}{n!}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. Par théorème, la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$.

b)

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+1+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}S(x+1)$$

c) Par converge uniformément sur $[a,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x \to +\infty$,

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}S(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

Quand $x \to 0$,

$$S(x+1) \to S(1)$$

par continuité et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - 1$$

donc

$$S(x) = \frac{1+S(x+1)}{x} \sim \frac{\mathrm{e}}{x}$$

Exercice 54 : [énoncé]

a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x) = x(\mathrm{th})'(c)$ avec $c \in]n, x+n[$.Puisque $(\mathrm{th})'(c) = \frac{1}{\mathrm{sh}^2(c)}$, on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{\mathrm{sh}^2(n)} \sim \frac{4x}{\mathrm{e}^{2n}}$$

Par suite $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

b) Pour $a \in \mathbb{R}^+$, l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \frac{a}{\mathrm{sh}^2(n)}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que S est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme S l'est aussi.

En effet, pour $x < y$,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \sum_{k=1}^{n} f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque $f_0(x) < f_0(y)$, on parvient à

$$S(x) < S(y)$$

c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n) - \mathrm{th}(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n) - \mathrm{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(n+1) -$$

avec convergence des deux séries introduites.

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n) - \mathrm{th}(n+1)) = S(x) - \mathrm{th}x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(n+1) - \mathrm{th}n) = 1$$

On conclut à la relation proposée.

d) S admet une limite en $+\infty$ car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général

$$S(n+1) - S(n) = 1 - \mathrm{th}n$$

Or

$$1-\mathrm{th}n = \frac{\mathrm{ch}n - \mathrm{sh}n}{\mathrm{ch}n} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{ch}n} \sim \frac{1}{2\mathrm{e}^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.
On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction S converge.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Notons : $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.
Pour $x=0$, $f_n(x)=0$ donc $S(x)$ est bien définie.
Pour $x\in\left]0,1\right[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$ et $S(x)$ est bien définie.
Pour $x=1$: $f_n(x)=1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.
Pour $x\in\left]1,+\infty\right[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \to \frac{1}{x} < 1$ donc $S(x)$ est bien définie.
Finalement S est définie sur $\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ par convergence simplement de $\sum f_n$ sur ce domaine.
b)

$$\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[, S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x)$$

c) Soit $0<a<1$. Sur $[0,a]$,

$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant a^n \text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $\left[0,1\right[$. Par théorème S est continue sur $\left[0,1\right[$.
Par composition de fonctions continues $S : x\mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $\left]1,+\infty\right[$.
d)

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

Chaque f_n est croissante sur $\left[0,1\right[$ et décroissante sur $\left]1,+\infty\right[$.
Par sommation de monotonie : S est croissante sur $\left[0,1\right[$ et décroissante sur $\left]1,+\infty\right[$.
$S(0)=0$.
Quand $x\to 1^-$,

$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \to +\infty$$

donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

Puisque $S(1/x)=S(x)$, on obtient par composition de limites, $\lim_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Pour $x\in\left]-1,1\right[$,

$$|u_n(x)| = o\left(|x|^n\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$,

$$|u_n(x)| = o\left(1/|x|^n\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $x=1$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
b)

$$f(x)+f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Soit $a\in\left[0,1\right[$. $\|f\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{a^n}{1-a^n} \leqslant \frac{a^n}{1-a}$ donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $\left]-1,1\right[$, on peut affirmer que f est continue sur $\left]-1,1\right[$. Puisque $f(x) = C^{te} - f(1/x)$, f est aussi continue sur $\left]-\infty,-1\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$ par composition de fonctions continues.
d) Pour $x\in[0,1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geqslant 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi f continue à droite en 1.

Exercice 57 : [énoncé]
En réorganisant la somme

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(n) = (1 - k/n)^n \text{ si } k \leqslant n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $f_k(n) \to \mathrm{e}^{-k}$.
Pour $k \leqslant n$, $|f_k(n)| = \exp(n \ln(1 - k/n)) \leqslant \exp(-k)$ et cette majoration vaut aussi pour $k > n$. Ainsi $\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \mathrm{e}^{-k}$ et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.
Par interversion limite/somme infinie, on obtient

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1 - 1/\mathrm{e}}$$

Exercice 58 : [énoncé]
Posons $f_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha}$ pour $k \leqslant n$ et $f_k(n) = 0$ sinon.
Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $f_k(n) \to \exp(-k\alpha)$.
Pour $k \leqslant n |f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1 - k/n)) \leqslant \mathrm{e}^{-k\alpha}$ et cette majoration vaut aussi pour $k > n$. Ainsi $\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \mathrm{e}^{-k\alpha}$ et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.
Par interversion limite/somme infinie
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k\alpha}$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}-1}$.

Exercice 59 : [énoncé]
Par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}$$

Considérons $f_k : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définies par

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geqslant k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon}$$

En tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$$

La série de fonctions $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \to \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$ en tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $|f_k(x)| \leqslant \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}^+$. Pour k fixé, quand $x \to +\infty$,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \to \frac{z^k}{k!}$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$$

Exercice 60 : [énoncé]
$\left\|\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0, 1]$:
$\int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} \mathrm{d}\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha \mathrm{d}\alpha}{\alpha^2+n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi \frac{\mathrm{ch}\pi\alpha}{\mathrm{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ donc $\int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} \mathrm{d}\alpha = \left[\ln \frac{\mathrm{sh}\pi\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \ln \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}$. On en déduit que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
b) Par convergence normale sur $[1, +\infty[$, $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2} = 1$.
Par comparaison avec une intégrale
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2t^2} \,\mathrm{d}t$.
Or on peut calculer l'intégrale :

```
assume(a>0);
simplify(int(a*exp(-(a*t)^2),t=0..infinity));
```

donne $\sqrt{\pi}/2$.
On peut conclure $\lim\limits_{a\to 0^+} af(a) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 62 : [énoncé]
a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.
b)

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n + \sum\limits_{k=1}^{n}\ln k - \sum\limits_{k=0}^{n}\ln(x+k) = x\ln n - \ln x - \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
Or la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O\left(1/n^2\right)$ et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = x\ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x>0$ et $n\geqslant 1$. f_n est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a,b]\subset\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 63 : [énoncé]
a) $I=\mathbb{R}^+$.
b) Pour $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+\star}$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{n^\alpha b\mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$.

c) Après étude de variation,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha<2$.
d)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^\alpha\mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}$$

Or

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n\to+\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\|u_k\|_\infty \to 0$$

ceci est à exclure.
e) Si S est continue en 0 alors

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 64 : [énoncé]
Pour $|x|\geqslant 1$, la série est grossièrement divergente. Pour $|x|<1$, $\frac{x^n}{1+x^n}\sim x^n$ et donc la série est absolument convergente. La fonction S est définie sur $]-1,1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,
$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$ donc pour $a\in[0,1[$, $\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant na^{n-1}$ ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1,1[$. Par suite la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.
$S(0) = \frac{1}{2}$ donc $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$.
Pour $x\in[0,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}$$

Puisque $\sum_{p\geqslant 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

On a alors

$$(1-x)S(x)=\frac{1-x}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x)=x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x\in[0,1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0,1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1)=1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right\|_\infty\leqslant u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x)\leqslant\frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}=\ln 2$$

et finalement

$$S(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}\frac{\ln 2}{1-x}$$

Exercice 65 : [énoncé]
Puisque $a_n>0$ et $\sum a_n(1+|x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x)=a_n|x-x_n|$.
Comme $|a_n|x-x_n||\leqslant|a_n||x|+|a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M,M]$, $\|f_n\|_\infty\leqslant Ma_n+a_n|x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.
Soit $[\alpha,\beta]\in\mathbb{R}$ tel que $x_n\notin[\alpha,\beta]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et $f_n'(x)=\varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon|=1$.

Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha,\beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a,b[$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},x_n\notin]a,b[$.
Soit $a\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $x_n=a$.
En considérant $A=\{n\in\mathbb{N}/x_n=a\}$, on peut écrire par absolue convergence $f(x)=\sum_{n\in A}a_n|x-a|+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A}a_n|x-x_n|=\alpha|x-a|+g(x)$ avec $\alpha>0$.

Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty}a_n\leqslant\frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire
$f(x)=\alpha|x-a|+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A,n\geqslant N+1}a_n|x-x_n|+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A,n\leqslant N}a_n|x-x_n|$.
La fonction $x\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A,n\leqslant N}a_n|x-x_n|$ est dérivable au voisinage de a.
Cependant, la fonction $\varphi:x\mapsto\alpha|x-a|+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A,n\geqslant N+1}a_n|x-x_n|$ n'est quand à elle pas dérivable en a.
En effet, pour $h>0$, $\frac{1}{h}(\varphi(a+h)-\varphi(a))\geqslant\alpha-\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{\alpha}{2}$ alors que pour $h<0$, $\frac{1}{h}(\varphi(a+h)-\varphi(a))\leqslant-\alpha+\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha}{2}$.
Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 66 : [énoncé]
Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.
Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0)=0$.
On a $f(x)=\frac{f(x)}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$ donc $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^{n+1})}{2^n}$.
Posons $h(x)=\sup_{[0,x]}|f|$.
Pour $x>0$, on a $x^{n+1}\in\left[0,x^2\right]$ pour tout $n\geqslant 1$. On en déduit
$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h(x^2)=h(x^2)$.
Ainsi $h(x)\leqslant h(x^2)$ puis en itérant $0\leqslant h(x)\leqslant h(x^{2^n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Or pour $x\in[0,1[$, $x^{2^n}\to 0$ et $\lim_{0^+}h=0$ (car $f(0)=0$) donc $h(x)=0$ sur $[0,1[$.
Finalement f est nulle sur $[0,1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 67 : [énoncé]
a) La série de fonctions considérée converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Sa somme est donc continue et de plus 1-périodique.
b) Soit $\alpha\geqslant 1$. Pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$, $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à $[-\alpha,\alpha]$.

Posons $M_\alpha = \|f\|_{\infty,[-\alpha,\alpha]}$. La relation $f(x) = \frac{1}{c}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$ donne $|f(x)| \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$. On en déduit $M_\alpha \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha$ puis $M_\alpha = 0$ puisque $c > 2$.
Ainsi f est nulle sur $[-\alpha, \alpha]$ et puisque ceci vaut pour tout $\alpha \geqslant 1$, f est la fonction nulle.
c) Posons $h : x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
La fonction $g = f - h$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, 1-périodique et continue.
On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{f}(x)$ avec $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right)$. Par convergence uniforme sur $[-1/2, 1/2]$, la fonction $\tilde{f}$ est continue en 0.
On peut aussi écrire $h(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{h}(x)$ avec $\tilde{h}$ continue en 0.
La fonction $g = f - h$ se prolonge donc par continuité en 0.
Par périodicité, g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on remarque que $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$ et $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$.
On en déduit $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ mais aussi pour $x \in \mathbb{Z}$ par continuité.
En vertu de b), on peut affirmer $g = 0$ et donc $f = h$.

Exercice 68 : [énoncé]
1.a) Les facteurs du produit définissant $P_n(x)$ étant tous strictement positifs, on a

$$\ln P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right)\right]$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right) = \frac{x}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{x}{2k-1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente, donc la suite $(\ln P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et on en déduit que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel strictement positif.
1.b) On définit la suite de fonctions puis on en trace quelques éléments

```
P:=(n,x)->product((1+x/(2*k))/(1+x/(2*k-1)),k=1..n):
plot([seq(P(n,x),n=1..10)],x=0..20,color=red
```

2.a) Posons $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right)$$

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut calculer $f_n'(x)$ avec Maple par exemple

```
f:=(n,x)->ln(1+x/(2*n))-ln(1+x/(2*n-1));

normal(diff(f(n,x),x));
```

On obtient

$$f_n'(x) = -\frac{1}{(x+2n)(x+2n-1)}$$

On a alors

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2n(2n-1)}$$

et donc

$$\|f_n'\|_\infty = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, que la série $\sum f_n$ converge simplement et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, on peut affirmer que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et par suite $P = \exp S$ aussi.
2.b) Les fonctions f_n sont toutes décroissantes donc S est décroissante puis, par composition, P est décroissante.
Puisque P est décroissante, P admet une limite en $+\infty$ qui est sa borne inférieure.
Puisque $P \geqslant 0$, on peut même affirmer que P converge vers un réel positif.
3.a) On a

$$P_n(2j) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1 + \frac{j}{k}}{1 + \frac{2j}{2k-1}}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+j)}{\prod_{k=1}^{n}k}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1+2j)}$$

avec

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+j)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+j)!}{j!n!},\prod_{k=1}^{n}(2k-1)!=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1+2j)=\frac{(2n+2j)!}{2^{n+j}(n+j)!}\frac{2^j j!}{(2j)!}=\frac{(2n+2j)!j!}{2^n(n+j)!(2j)!}$$

Ainsi

$$P_n(2j)=\left(\frac{(n+j)!}{j!n!}\right)^2\frac{(2n)!(2j)!}{(2n+2j)}=\frac{(2j)!}{(j!)^2}\frac{((n+1)(n+2)\dots(n+j))^2}{(2n+1)(2n+2)\dots(2n+2j)}$$

En passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient

$$P(2j)=\frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}$$

Il reste à comparer avec le résultat fourni par Maple.

```
limit(P(n,2*j),n=infinity);
```

Donne une expression à l'aide de la fonction Γ. Sachant $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ et $\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$, on peut faire le lien avec l'expression précédente.
Contentons-nous d'observer la coïncidence des premières valeurs…

```
seq(limit(P(n,2*j),n=infinity),j=1..10);
seq((2*j)!/(j!)^2/2^(2*j),j=1..10);
```

3.b) La fonction P est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
On étudie le comportement de $P(2j)$ quand $j\to+\infty$

```
series((2*j)!/(j!)^2/2^(2*j),j=infinity);
```

On obtient

$$P(2j)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi j}}$$

Sachant P décroissante, on montrer par comparaison avec une intégrale, que si la fonction P est intégrable alors la série $\sum P(2j)$ converge. Ceci n'est visiblement par le cas et donc la fonction P n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 69 : [énoncé]
Posons

$$f_n:x\mapsto\frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Sachant

$$2\,|nx|\leqslant 1+n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

Soit $a>0$. Pour $|x|\geqslant a$,

$$|f_n'(x)|\leqslant\frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}=\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\leqslant\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^\star$.
La somme S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right) \geqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 70 : [énoncé]

a) ζ est bien définie sur $]1,+\infty[$. $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

Pour tout $a > 1$ sur $[a,+\infty[$,

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

donc

$$\left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

Pour $\rho \in]1,a[$,

$$n^\rho \left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \to 0$$

donc $\sum \left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge puis $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
Il en découle que la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$. Par théorème on peut conclure ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
b)

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)}{n^x} \leqslant 0$$

donc ζ est décroissante.

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

donc ζ est convexe.
c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon. Par le théorème de la double limite

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

d) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

En sommant, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

e) Le signe de $\ln(\zeta(x))''$ est celui de

$$\zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{x/2}} \frac{-\ln n}{n^{x/2}}$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-\ln n)^2}{n^x}$$

puis quand $N \to +\infty$,

$$\zeta'(x)^2 \leqslant \zeta(x)\zeta''(x)$$

Exercice 71 : [énoncé]

a) $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
b) Le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

Pour $x = 1$, il y a divergence car $\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$.
Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées sachant que la suite $\zeta(n)$ est décroissante positive.
c) Par les séries entières, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées permettant une majoration du reste, on établir la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[-1,0]$ et donc la continuité de sa somme en -1.
d) Pour $x \in]-1,1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes car $\sum_{p\geqslant 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ converge.

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-x}\right)$$

et on ne peut faire plus simple.

Exercice 72 : [énoncé]
a) ζ est définie sur $]1,+\infty[$ et ζ_2 est définie sur $]0,+\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)
b) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a > 1$,

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n^a}$$

or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction ζ est continue.
$g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.
Par le critère spécial des séries alternées

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x}$$

Pour tout $a > 0$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x} \leqslant \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction ζ_2 est continue sur $]0,+\infty[$.
c) Pour $x > 1$

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x)$$

Exercice 73 : [énoncé]
$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^x}$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers ζ_2 sur $]0,+\infty[$.
La suite $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Etudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geqslant 1/x$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ donc φ décroissante sur $\left[e^{1/x},+\infty\right[$. Ainsi $(f_n'(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{1/x})+1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geqslant E(e^{1/a})+1$ on a pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.
On peut alors conclure que la fonction ζ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 74 : [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, ζ_2 est bien définie sur $]0,+\infty[$.
$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}\frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Etudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p - x\ln t)}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geqslant p/x$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ donc φ décroissante sur $\left[e^{p/x},+\infty\right[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{p/x})+1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geqslant E(e^{p/a})+1$ on a pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+p}(\ln n)^p}{n^x}\right| \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ (pour tout $a>0$) donc converge simplement sur $]0,+\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.
Par théorème on peut alors conclure que ζ_2 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 75 : [énoncé]
A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.
a) Sur $[0,\pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CS} 0$ $|\tan^n x| \leqslant 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0,\pi/4[$ donc

$$u_n \to \int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

b) Sur $[0,+\infty[$, $\frac{1}{x^n+e^x} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0,1[$ et $f(x)=0$ sur $]1,+\infty[$.
De plus $\left|\frac{1}{x^n+e^x}\right| \leqslant e^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$ donc

$$u_n \to \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{e-1}{e}$$

Exercice 76 : [énoncé]
A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.
a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0,+\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.
$u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
$\left|\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1\left|\sin^{n-2}(x)\right|\,\mathrm{d}x$ car $|\sin x| \leqslant |x|$.
Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée $\int_0^1\left|\sin^{n-2}(x)\right|\,\mathrm{d}x \to 0$ et donc $\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x \to 0$.
Aussi $\left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x)=0$ pour tout $x \neq \pi/2\quad[\pi]$. De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x \to \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ puis $u_n \to 0$.
b) $u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} + \int_1^{+\infty}\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$.
$\left|\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$ en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$.
Ainsi $u_n \to 1$.
c) $u_n = \int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} + \int_1^{+\infty}\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$.
$\left|\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et $\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n-1}$ donc $u_n \to 0$.
On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 77 : [énoncé]
$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)$ sur $[0,+\infty[$.
$f_n(x) \xrightarrow{CS} e^{-x}$ et en vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leqslant u$ on a $|f_n(x)| \leqslant e^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$. Par application du théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Exercice 78 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\tilde{n} \underset{u=1-x/n}{=} n\int_0^1\sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1\sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \sim n$$

Exercice 79 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nx$, $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
$f_n \xrightarrow{CS} f_\infty$ avec $f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
$|f_n(u)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Par convergence dominée, $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi f(0)}{2}$.

Exercice 80 : [énoncé]
On a

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=nt}{=} \int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1+u/n} & \text{si } u \in [0,n] \\ 0 & \text{si } u \in \,]n,+\infty[\end{cases}$$

On a $f_n \xrightarrow{CS} f$ avec f_n et f continues et $|f_n| \leqslant |f| = \varphi$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0,+\infty[$ indépendant de n.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \to \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 81 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi \quad [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left|\sin^n t\right|\mathrm{d}t$$

On a

$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \quad [\pi] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 82 : [énoncé]
Les fonctions données par

$$f_n(t) = \left(1+t^2/n\right)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x\ln(1+t^2/x)$$

φ' est croissante et $\lim\limits_{+\infty} \varphi' = 0$ donc φ est décroissante et par conséquent :
$\forall n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \leqslant \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 83 : [énoncé]
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ est définie car $\sqrt{t}\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $t^2\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, e^{-t} est la limite de $u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\chi_{[0,n]}(t)$. Le $n-1$ de l'exposant n'est pas usuel et peut très bien être remplacé par un n. Néanmoins pour alléger les calculs à venir, le $n-1$ est préférable.
$\ln(t)u_n(t) \to \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $|\ln(t)u_n(t)| \leqslant \mathrm{e}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ donc
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$ avec
$\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$ et
$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = [\ln(u)(1-(1-u)^n)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$. On notera qu'on a choisi $(1-(1-u)^n)$ pour primitive de $n(1-u)^{n-1}$ car celle-ci s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales convergentes.
Enfin $\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$ puis
$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$. Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$.

Exercice 84 : [énoncé]
On applique le théorème de convergence dominée en exploitant f bornée car continue sur segment. On obtient

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \to f(0)$$

Exercice 85 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right| \leqslant \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Quand $n\to+\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \to -\infty$$

car $\ln(1+x/k)\sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)} \to 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 86 : [énoncé]
On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec

$$f_k(n) = \begin{cases} (1-k/n)^n & \text{si } k<n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Pour $k<n$, on a

$$|f_n(k)| \leqslant \exp(n\ln(1-k/n)) \leqslant \exp(-k)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $k\geqslant n$.
Par suite

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-k}$$

Or la série $\sum \mathrm{e}^{-k}$ converge et par comparaison de série à termes positifs on obtient que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.
Quand $n\to+\infty$, $f_k(n)\to \mathrm{e}^{-k}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \to \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Exercice 87 : [énoncé]
Posons $f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x\in[0,n]$ et $f_n(x)=0$ si $x\in\,]n,+\infty[$.
Pour $x\in\mathbb{R}^+$, quand $n\to+\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln\left(1-x^2/2n^2+o(1/n^2)\right)\right) \to \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[{[0,+\infty[}]{CS} f$ avec $f : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi : [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1-t^2/4-\cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x\in[0,1]\,,\psi(x)\geqslant 0$$

On en déduit que, pour $x\in[0,n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right) \leqslant \ln\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right) \leqslant -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n, +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 88 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

Exercice 89 : [énoncé]
a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)$$

Pour $t \in [0, h/\delta[$, on a $f_n(t) \to 1$.
Pour $t \in]h/\delta, 1]$, on a $f_n(t) \to 0$.
Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta, 1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Par convergence dominée,

$$I_n \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{h/\delta} 1\,\mathrm{d}t = \frac{h}{\delta}$$

b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\frac{1}{n}\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\,\mathrm{d}t \leqslant F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\int_{k/n}^{(k+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\,\mathrm{d}t$$

En sommant ces inégalités

$$\frac{1}{n}\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n} I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)\right)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta\sqrt{n}}$$

Exercice 90 : [énoncé]
Par le changement de variable $t = x^n$, on a formellement

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t$$

Posons pour $n \geqslant 1$

$$f_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1, +\infty[$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer que les intégrales étudiées existent et

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 91 : [énoncé]
Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 92 : [énoncé]
Sur $]0,1[$,

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}(\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}\ln t$.
Les $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 93 : [énoncé]
Par une intégration par parties : $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
Or sur $]0,1[$, $-\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}t^{2n}(\ln t)$. Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1}t^{2n}\ln t$.
Les $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0,1[$.
$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$ et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc
$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
Rq : on aurait aussi pu exploiter $\arctan t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}t^{2n+1}$.

Exercice 94 : [énoncé]
a) Par intégration par parties, $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
Or sur $]0,1[$, $-\frac{\ln t}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}t^n(\ln t)$. Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1}t^n\ln t$.
Les $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t}$ elle-même continue par morceaux sur $]0,1[$.
$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$ et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc
$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}t^n\ln t\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
Rq : on aurait aussi pu exploiter $\ln(1+t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$ pour peu que cette relation soit connue à ce stade de l'année.
b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 95 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{x^x} = \mathrm{e}^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}$$

donc
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$
avec
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$$
Les f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ CS vers une fonction continue par morceaux sur $]0,1]$.
Les f_n sont intégrables et
$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon \to 0$
$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} \mathrm{d}x$$
Ainsi
$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$
Par suite
$$\int_0^1 |f_n| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ et } \sum \int_0^1 |f_n| \text{ converge}$$
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient que l'intégrale étudiée et définie et
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
puis le résultat voulu.

Exercice 96 : [énoncé]
Pour $x > 0$,
$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$
donc
$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$
avec
$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0,1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et
$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} \,\mathrm{d}x$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon \to 0$
$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$
Ainsi
$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$
Par suite
$$\int_0^1 |f_n| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0,1]} x^x \,\mathrm{d}x$ est définie et
$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$
puis le résultat voulu.

Exercice 97 : [énoncé]
Pour $x \in]0,1[$, on a
$$\frac{(\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = x^n(\ln x)^p$ sur $]0,1[$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ l'est aussi.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1[$ et par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = (-1)^p \int_0^1 x^n(\ln x)^p \,\mathrm{d}x = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$$

avec en substance existence de l'intégrale et de la série intoduite.

Exercice 98 : [énoncé]

La convergence de l'intégrale proposée est facile.

En découpant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Dans la somme proposée, le terme intégrale ne dépend de l'indice sommation donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\right)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Quand $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}} \sim \frac{n}{\pi}$$

et

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

par application du théorème de convergence dominée.

Par le changement de variable $t = \tan x$ inspiré des règles de Bioche,

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Au final

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 99 : [énoncé]

a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2}\sin t(\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

b) Pour $\alpha \leqslant 1$,

$$\forall t \in \left]0,\pi/2\right], (\sin t)^\alpha \geqslant \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \geqslant u_n(1)$.

On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2}(\sin t)^\alpha\frac{1-(\cos t)^{n+1}}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

avec l'intégrale majorant qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t} \sim 2\frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \to 0^+$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

c) Par ce qui précède et l'application du théorème de convergence dominée (ou par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini) on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1+\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

Exercice 100 : [énoncé]
Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$$

La fonction $t \mapsto \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t|\, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc par le théorème de Fubini d'intégration terme à terme $t \mapsto \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 101 : [énoncé]
Notons que $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
Pour tout $t \in]0, 1]$,

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et est de somme $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ continue par morceaux.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, 1]$ et

$$\int_{]0,1]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!(x+n)}$$

La série $\sum \int_{]0,1]} |f_n|$ converge donc on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Exercice 102 : [énoncé]

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \mathrm{e}^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Par convergence normale de la série de fonctions sous-jacente sur $[0, 2\pi]$

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+k)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Or $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ si $p \neq 0$ et $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$ si $p = 0$.
Par conséquent

$$I_n = (-1)^n 2^n \pi \text{ si } n \leqslant 0 \text{ et } I_n = 0 \text{ si } n > 0$$

Exercice 103 : [énoncé]
Si $|a| < 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it} - a}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{i(n-1)t}}{1 - a\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it} - a}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi a^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $|a| > 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it} - a}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{1 - \mathrm{e}^{it}/a}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -2\pi a^{n-1} & \text{si } n \leqslant \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 104 : [énoncé]

a) $f : x \mapsto \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ est définie, continue sur $[0,+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie.

b)

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{n^2+x^2}\right]_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{n^2+a^2}$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et de somme nulle.

c) Pour $x \in [0,a]$,

$$\left|\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{n^2+a^2}{n^4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a^2}{n^4} < +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0,a]$. Par suite

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

d) La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{a}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

e) Ci-dessus :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Le résultat diffèrent de celui obtenu en b). Il est donc faux ici de permuter somme et intégrale. Document7

Exercice 105 : [énoncé]

a) $a_{n+1}/a_n \to 1/\mathrm{e} < 1$.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|nt^n\mathrm{e}^{-nt}\right|\,\mathrm{d}t = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$(1-t\mathrm{e}^{-t})\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-nt} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 106 : [énoncé]

a) En appliquant le théorème de convergence dominée $\ell = 1$.

b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

c) Pour $y \in \left]0,1\right[$,

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolue,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

Sans peine, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

d) Par changement de variable ($\mathcal{C}^1$ difféomorphisme),

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 107 : [énoncé]

a) f_n est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+\star}$, se prolonge par continuité en 0 et vérifie $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

b) On définit les termes de la suite

```
u:=n->int(exp(-t)/t^(n+1)*(exp(t)-sum(t^p/p!,p=0..n)),t=0..infinity);
```

On évalue les 10 premiers termes

```
seq(u(k),k=1..10);
```

Pour conjecturer une expression, on peut utiliser l'instruction

```
ifactor
```

. Cela permet d'entrapercevoir des factoriels.
Le calcul suivant

```
seq(u(k)*k!,k=1..10);
```

permet de conjecturer $u_n = 1/(n.n!)$.

c) En partant de $f_n(t) = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{t^p\mathrm{e}^{-t}}{p!t^{n+1}} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p\mathrm{e}^{-t}}{(p+n+1)!}$, en justifiant l'intégration terme à terme par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient $u_n = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{p!}{(p+n+1)!}$.

On a alors $nu_n = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(n+p+1)p!}{(n+p+1)!} - \frac{(p+1)p!}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!}$ après télescopage.

Exercice 108 : [énoncé]
a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par absolue convergence.
b) Les fonctions sommées sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par convergence normale sur tout segment de la série des dérivées, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) On calcule l'intégrale

```
int(1/(1+t^4),t=0..infinity);
```

On obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.
d) Par comparaison avec une intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{t^4+u^4} \leqslant f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{t^4+u^4}$.
Or par changement de variable affine $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+u^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$ et
$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+u^4} = \frac{1}{t^3}\int_{1/t}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^4} \sim \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$.
Ainsi $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$.
e) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{4k} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{4n+1}}{1+t^4}$.
En intégrant, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
Or $\left|\int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{4n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4n+2} \to 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 109 : [énoncé]
a) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(3n+1)(2n+1)} = \frac{3}{3n+1} - \frac{2}{2n+1}$$

En écrivant

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{an}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{a(N+1)}\,\mathrm{d}t \to 0$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

On en déduit

$$S = 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} - \frac{\pi}{2}$$

b) Reste à calculer l'intégrale par

```
int(1/(1+t^3),t=0..1);
```

Exercice 110 : [énoncé]
a) Pour $a > 1$ ou $a < 1$, les variations de $x \mapsto 1-(1-a)x$ montrent que 0 n'est pas valeur prise pour $x \in [0,1]$.
b) On définit l'intégrale

```
J:=n->int(x^n*(1-x)^n/(1-(1-a)*x)^(n+1),x=0..1);
```

On calcule les valeurs demandées

```
a:=1/5;seq(J(n,a),n=1..10);
```

etc.

On peut conjecturer $I_n(a) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\ln a$ (fortement inspiré par la dernière question).
c) En dérivant à l'ordre n la relation

$$\frac{1}{1-(1-a)x} = \sum_{p=0}^{+\infty} (1-a)^p x^p$$

on obtient

$$\frac{1}{(1-(1-a)x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} (1-a)^p x^p$$

Posons

$$f_p(x) = \binom{n+p}{p} (1-a)^p x^{n+p} (1-x)^n$$

de sorte que $\frac{x^n(1-x)^n}{(1-(1-a)x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(x)$.
On a

$$\int_0^1 |f_p(x)|\,\mathrm{d}x = |1-a|^p \frac{[(n+p)!]^2}{p!(2n+p+1)!}$$

Pour étudier la convergence de la série de terme général $\int_0^1 |f_p|$ on peut étudier la limite du facteur de $|1-a|^p$

```
limit(((n+p)!)^2/p!/(2*n+p+1)!,p=infinity);
```

Ainsi $\int_0^1 |f_p| = o\left(|1-a|^p\right)$ donc $\sum \int_0^1 |f_p|$ converge.
On peut permuter somme et intégrale ce qui donne

$$I_n(a) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{[(n+p)!]^2}{p!(2n+p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} R_n(p)(1-a)^p$$

avec R_n introduit dans la question qui suit.
d) $\deg R_n < 0$ donc

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+n+k+1}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k (n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}$$

On peut alors écrire

$$I_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(1-a)^p}{n+k+1+p}$$

Or on sait

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p} = -\ln(1-t)$$

pour $t \in \,]-1,1[$.
Par décalage d'indice et en exploitant $a \in \mathbb{Q}$, on obtient

$$I_n(a) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\ln a$$

Exercice 111 : [énoncé]
a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à $\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.
En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.
b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir $S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Puisque $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$, on observe
$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ $(\star)$.
En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient $4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$ puis $S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}$.
c) On multiplie la relation $(\star)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 112 : [énoncé]
a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s,\lambda) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{C}$.
$\Delta_\lambda :]0;+\infty[$.
b) $F_\lambda(s) = \frac{1}{s}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right)$. Or $\left|1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\lambda|}$ donc $F_\lambda(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.
c) Puisque $\left|\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leqslant \frac{\lambda^n}{n!}$, il y a converge normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer
$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow[s\to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^\lambda$ et donc $F_\lambda(s) \underset{s\to0^+}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}$.
d) Par intégrations par parties successives : $\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$.
e) $F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n\,\mathrm{d}y$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :
$F_\lambda(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda y}(1-y)^{s-1}\,\mathrm{d}y$.

Exercice 113 : [énoncé]
Pour $t \in \,]0,1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 114 : [énoncé]
La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} \mathrm{e}^{-2t}$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions f_p et $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = O\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 115 : [énoncé]
$t^t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\ln t)^n}{n!}$. Par intégration par parties $\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du second membre et permet d'échanger somme et intégrale pour obtenir $\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$ qui permet de conclure.

Exercice 116 : [énoncé]
On sait que la fonction ζ est continue.
$\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x$ avec $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2\ln n}$.
La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors $\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$.

Exercice 117 : [énoncé]
a) On calcule l'intégrale

```
int(t^n*(1-t)^m,t=0..1);
```

On convertit le résultat sous forme de nombres factoriels

```
convert(%,factorial);
```

b) On calcule l'intégrale

```
int(x^4*(1-x)^4/(1+x^2),x=0..1);
```

Pour $x \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{22}{7} - \pi \leqslant \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$$

ce qui fournit, après calcul, l'encadrement proposé.
c) La division euclidienne de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$ permet d'écrire

$$x^4(1-x)^4 = A(x)(1+x^2) + R(x) \text{ avec } \deg R \leqslant 1$$

En évaluant en $x = i$, on obtient $R(i) = -4$ et donc $R(x) = -4$ car R est un polynôme réel.
Par suite
$$\frac{x^4(1-x)^4}{4} + 1 = A(x)\frac{1+x^2}{4}$$
puis la relation proposée.
D'une part
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$
D'autre part
$$\int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} A(x)x^{4x}(1-x)^{4x}\,\mathrm{d}x$$
relation obtenue en utilisant le développement en série entière
$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n \text{ pour } u = \frac{x^4(1-x)^4}{4}$$
Puisque ce développement en série entière converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,1[$ et puisque $0 \leqslant \frac{x^4(1-x)^4}{4}$

il y a convergence uniforme de la série dans l'expression intégrale précédente. Ceci permet d'intégrer terme à terme cette somme de fonctions continues et d'obtenir
$$\int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k$$
d) En découpant la somme infinie en une somme partielle et son reste
$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k$$
Or
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{4^k} A(x)x^{4k}(1-x)^{4k}\,\mathrm{d}x$$
Par le même argument que celui qui précède, on peut intégrer terme à terme et ainsi
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}} x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}\,\mathrm{d}x$$
puis
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} \int_0^1 \frac{x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
Le réel λ cherché est $(-1)^{n+1}/4^n$.
e) On calcule $A(x)$

```
quo(x^4*(1-x)^4,1+x^2,x);
```

On obtient
$$A(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4$$
On définit les intégrales L_k

```
L:=k->int((x^6-4*x^5+5*x^4-4*x^2+4)*x^(4*k)*(1-x)^(4*k),x=0..1);
```

On calcule L_0 et L_1

```
L(0);L(1);
```

On obtient respectivement $22/7$ et $76/15015$.
Par suite
$$L_0 - \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{8}\int_0^1 x^8(1-x)^8\,\mathrm{d}x \leqslant \pi \leqslant L_0 - \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}\int_0^1 x^8(1-x)^8\,\mathrm{d}x$$
ce qui fournit l'encadrement
$$\frac{38491543}{12252240} \leqslant \pi \leqslant \frac{38491550}{12252240}$$

Exercice 118 : [énoncé]
a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante.
Par convergence dominée, $u_n \to 0$.
b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$
avec convergence de l'intégrale.
Or, quand $x \to 0^+$
$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$
et donc l'intégrale diverge.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 119 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\forall t>0,\ \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}=\sum_{n=0}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}$$

Posons $f_n:\mathbb{R}^{+\star}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t)=t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction

$$t\mapsto\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et par intégration par parties

$$\int_{[0,+\infty[}|f_n|=\int_0^{+\infty}f_n=\frac{1}{(a+bn)^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque la série $\sum\int|f_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t=\int_{[0,+\infty[}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n=\sum\int_{[0,+\infty[}f_n\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 120 : [énoncé]
Pour $x\in[0,2\pi]$, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{2\cos x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n!}$$

Posons

$$f_n:x\in[0,2\pi]\mapsto\frac{2^n\cos^n x}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ puisque

$$\|f_n\|_\infty\leqslant\frac{2^n}{n!}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}(\cos x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

Sachant

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^0\,\mathrm{d}x=2\pi\text{ et }\int_0^{2\pi}(\cos x)^1\,\mathrm{d}x=0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p}\,\mathrm{d}x=2\pi\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\text{ et }\int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p+1}\,\mathrm{d}x=0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}2\pi=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2\pi}{(p!)^2}$$

Exercice 121 : [énoncé]
On a $u_n\geqslant v_n=\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0,\pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t}=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}$$

Or quand $t\to0^+$

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}\sim\frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0,\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 122 : [énoncé]
On a
$$\frac{1}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{na}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$$
avec $f_n(t)=(-1)^n t^{na}$ sur $]0,1[$.
$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{na+1}$$
et $\sum\frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème de Fubini d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.
De plus la série de fonctions ne converge par uniformément sur $[0,1]$ car elle ne converge pas simplement en 1...
Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée.
Posons
$$S_n:t\mapsto\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ka}=\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a}$$
Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction
$$S:t\mapsto\frac{1}{1+t^a}$$
elle-même continue par morceaux.
De plus
$$|S_n(t)|\leqslant\frac{2}{1+t^a}=\varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $[0,1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient
$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$
Or
$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k t^{ka}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{ka+1}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$
avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Exercice 123 : [énoncé]
Notons que l'intégrale étudiée est bien définie.
Pour tout $x\in]0,1[$,
$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+\alpha-1}$$
Le théorème d'intégration terme à terme ne pourra pas s'appliquer car ici
$$\sum\int_{]0,1[}|f_n|=\sum\frac{1}{n+\alpha}\text{ diverge}$$
Nous allons alors intégrer terme à terme en exploitant les sommes partielles.
Posons
$$S_n:x\mapsto\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}=x^{\alpha-1}\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$
Les fonctions (S_n) sont continue par morceaux et converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction
$$S:x\mapsto\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$
elle-même continue par morceaux.
De plus
$$|S_n(x)|\leqslant\frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}=\varphi(x)$$
avec φ fonction intégrable sur $]0,1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient
$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
Or
$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$
et on peut donc conclure
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
avec en substance la convergence de la série introduite.

Exercice 124 : [énoncé]
a) Pour $t \in]0,1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1}\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(t)| \leqslant \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,1[$.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite..
b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 125 : [énoncé]
Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0,+\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.
Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.
De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \leqslant S_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 126 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x\mapsto (-1)^n\mathrm{e}^{-a_nx}$$

Les fonctions f_n sont continues et en vertu du critère spécial des séries alternées, on peut affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. De plus, par le critère spécial des séries alternées, on a

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-a_kx}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}x}$$

ce qui permet d'établir que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction

$$S : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_nx}$$

est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Pour intégrer terme à terme, exploiter les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : x\mapsto\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{e}^{-a_kx}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement vers S elle-même continue par morceaux.

En vertu du critère spécial des séries alternées, on a

$$0\leqslant S_n(x)\leqslant \mathrm{e}^{-a_0x}=\varphi(x)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}S(x)\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

Or

$$\int_0^{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-a_kx}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_nx}\,\mathrm{d}x$$

avec en substance convergence de la série.

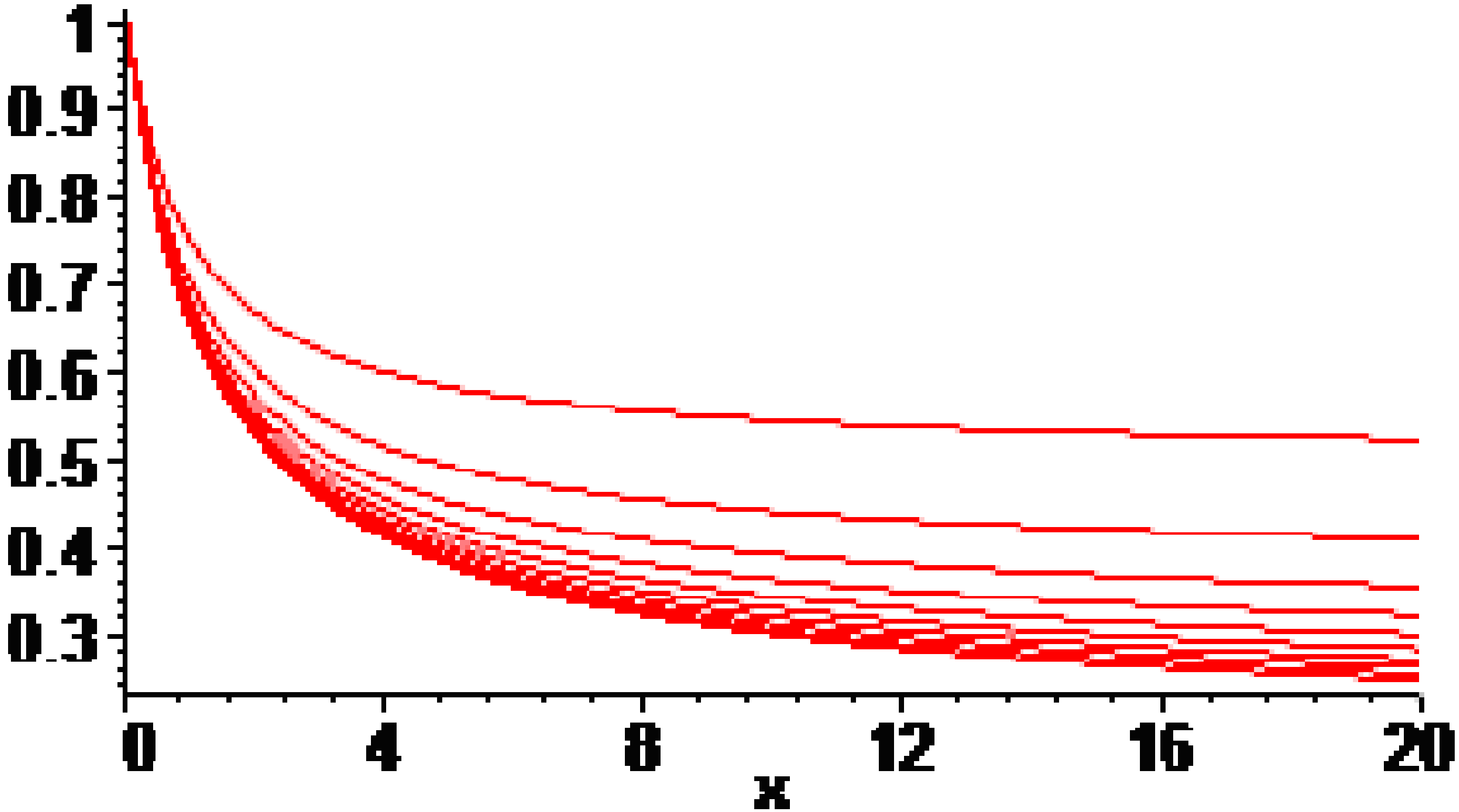

FIGURE 1 – Quelques éléments de la suite (P_n)